نظریه اطلاعات کوانتومی ـ بخش اول

وحیدکریمی پورـ دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

۱۰ اردیبهشت ۱۴۰۴

۱ مقدمه

همانطور که آنتروپی شانون در نظریه اطلاعات کلاسیک نقش محوری دارد، در نظریه اطلاعات کوانتومی نیز تعمیم آنتروپی شانون که به آن آنتروپی فون نویمان [۱] می گوییم ، نقش کلیدی دارد و همه مفاهیم این نظریه بر مبنای این آنتروپی تعریف می شوند. در واقع آنتروپی فون نویمان از سه جهت نقش کلیدی در نظریه اطلاعات کوانتومی ایفا می کند:

یک ـ درتعیین میزانی که می توان اطلاعات کوانتومی را فشرده کرد،

دوـ در تعیین ظرفیت یک کانال کوانتومی،

سه ـ و در تعیین اندازه درهمتنیدگی حالت های کوانتومی.

[۱] von Neumann Entropy

می توان نقش دیگری را نیز برای آنتروپی فون نویمان در نظر گرفت که مربوط است به تعریف بهتری از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ که از آنجا که مستقیما به نظریه اطلاعات مربوط نیست تنها به اختصار آن را معرفی خواهیم کرد. در این درس ما نخست انتروپی فون نویمان را تعریف کرده و خواص آن را بررسی می کنیم. این مطالعه فعلا بدون توجه به مفهوم فیزیکی این تابع انجام می شود. از نظر تاریخی نیز این نکته جالب توجه است که آنتروپی فون نویمان پیش از آنتروپی شانون و توسط جان فون نویمان [۲] ریاضی فیزیکدان مجارستانی الاصل امریکایی که کارهای مهم زیادی را در شاخه های مختلف فیزیک و ریاضیات انجام داده ، معرفی شده است.

شکل ۱: جان فون نویمان، ریاضیدان مجارستانی (۱۹۰۳ـ۱۹۵۷)

۲ آنتروپی فون نویمان و خواص آن

■ تعریف: هرگاه ρ یک ماتریس چگالی باشد، آنتروپی فون نویمان آن به صورت

$$S(\rho) := -tr(\rho\log_2\rho) \quad (۱)$$

[۲] John von Neumann

تعریف می شود. هرگاه ρ به صورت زیر قطری شود،

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|, \qquad (۲)$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$S(\rho) = -\sum_i p_i \log p_i. \qquad (۳)$$

به این ترتیب آنتروپی فون نویمان برابر است با همان آنتروپی شانون برای توزیع احتمالی که از ویژه مقدارهای ماتریس چگالی تشکیل شده است. برای آنتروپی فون نویمان نیز واحد بیت را به کار می بریم. بنابراین آنتروپی حالت $\rho = \frac{I}{2}$ یک بیت است.

- **مثال:** برای یک کیوبیت که در حالتِ $\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\cdot\sigma)$ قرار دارد، می دانیم ویژه مقادیر ماتریس چگالی برابر است با $\frac{1\pm r}{2}$ بنابراین، آنتروپی فون نویمان برابر است با:

$$S(\rho) = -\left[\frac{1+r}{2}\log_2\frac{1+r}{2} + \frac{1-r}{2}\log_2\frac{1-r}{2}\right]. \qquad (۴)$$

- **توضیح در باره نمادها:**

آنتروپی شانون را برای متغیر تصادفی X با $H(X)$ نشان می دهیم. البته این انتروپی به تابع توزیعی که روی این متغیر تصادفی تعریف شده بستگی دارد و نه به خود متغیر تصادفی X. بنابراین نماد دقیق این است که بنویسیم $H(P_x)$ ولی از نماد خلاصه $H(X)$ برای این منظور استفاده می کنیم. بسته به نیاز خود و برای روشنی و سادگی روابط از هرکدام از این نماد ها استفاده می کنیم. بنابراین به یاد داریم که

$$H(X) = H(P_x) \qquad (۵)$$

متناظر با آن آنتروپی فون نویمان برای یک سیستم A را با $S(A)$ نشان می دهیم ولی به یاد داریم که آنتروپی تابع ماتریس چگالی سیستمِ A است یعنی باید بنویسیم $S(\rho_A)$. بازهم بسته به نیاز خود و برای روشنی و سادگی روابط از هرکدام از این نماد ها استفاده می کنیم. بنابراین به یاد داریم که

$$S(A) = S(\rho_A). \qquad (۶)$$

اغلب اوقات اگر در باره یک سیستم معین حرف می زنیم از نوشتن اندیس A نیز صرف نظر می کنیم و می نویسیم $S(\rho)$.

حال خواص آنتروپی فون نویمان را بیان واکثر آنها را ثابت می کنیم.

- هرگاه ρ یک حالت خالص باشد، $S(\rho)=0$. اثبات این رابطه ساده است وباقطری کردن ρ براحتی انجام می شود.
- هرگاه $\rho' = U\rho U^\dagger$ که درآن U تبدیل یکانی است آنگاه $S(\rho')=S(\rho)$.
- هرگاه فضای هیلبرت ρ، d بعدی باشد، $S(\rho) \le \log_2 d$.
- **اثبات:** باقطری کردن ρ بدست می آوریم

$$S(\rho) = -\sum_i p_i \log_2 p_i = H(\{p_i\}). \tag{۷}$$

درفصل های قبل دیده ایم که تابع $H(\{p_i\})$ مقدارماکزیمم خود را برای $p_i = \frac{1}{d}$ اختیارمی کند واین ماکزیمیم برابراست با $\log_2 d$.

---

۳ آنتروپی نسبی

در این بخش به معرفی آنتروپی نسبی [۳] بین دو ماتریس چگالی می پردازیم. این کمیت را در درسهای قبل برای توابع توزیع احتمال کلاسیک معرفی کرده ایم. اینک آن را به همان ترتیب برای ماتریس های چگالی تعریف می کنیم. هم از نظر مفهومی و هم از نظر کاربردی که برای اثبات قضایای دیگر دارد، آنتروپی نسبی یکی از کمیت های مهم در نظریه اطلاعات کوانتومی است. اگر چه آنتروپی نسبی نسبت به دو متغیر خودش متقارن نیست اما از نظر مفهومی آنتروپی نسبی یک نوع فاصله بین دو ماتریس چگالی را نشان می دهد. بسیاری ازخواص دیگر آنتروپی فون نویمان با استفاده ازتعریف آنتروپی نسبی و مثبت بودن آن ثابت می شوند. آنتروپی نسبی چنین تعریف می شود:

- **تعریف:** فرض کنید که ρ و σ دو ماتریس چگالی باشند. دراین صورت آنتروپی نسبی به صورت زیرتوصیف می شود:

$$S(\rho\|\sigma) = tr(\rho\log_2\rho - \rho\log_2\sigma). \tag{۸}$$

بدیهی است که آنتروپی نسبی نسبت به تعویض دوماتریس چگالی متقارن نیست.

[۳] Relative Entropy

■ **مثال:** برای محاسبه آنتروپی نسبی بین دو حالت ρ و σ بهترین کار این است که اولین جمله را در پایه ویژه حالت های ρ و دومین جمله را در پایه ویژه حالت های σ حساب کنیم. به این ترتیب اگر تجزیه طیفی این دو حالت به ترتیب زیر باشد،

$$\rho = \sum_i p_i|i\rangle\langle i|, \qquad \sigma = \sum_\alpha q_\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|, \tag{۹}$$

آنگاه

$$S(\rho||\sigma) = \sum_i p_i \log p_i - \sum_i \langle i\rho\log\sigma|i\rangle = \sum_i p_i(\log p_i - \langle\log\sigma|i\rangle, \tag{۱۰}$$

و یا

$$S(\rho||\sigma) = \sum_i p_i(\log p_i - \log q_\alpha\langle i|\alpha\langle\alpha|i\rangle. \tag{۱۱}$$

بنابراین کافی است همه درایه های $\langle i|\alpha\rangle$ را حساب کنیم تا بتوانیم آنتروپی نسبی را بدست آوریم. خود این طبیعتا کار سختی است، چرا که نیازمند قطری کردن هر دو ماتریس است.

مهم ترین خاصیتی که آنتروپی نسبی دارد این است که صرف نظر از اینکه دو ماتریس چگالی نسبت به هم چه رابطه ای داشته باشند، همواره کمیتی مثبت است. این ویژگی باعث می شود که با انتخاب ماتریس های چگالی مناسب بتوانیم ویژگی های متعددی را برای آنتروپی فون نویمان برای یک ماتریس چگالی بدست آوریم. این شگرد را در ادامه این درس بارها به کار خواهیم بست. اما نخست به اثبات مثبت بودن آنتروپی نسبی بپردازیم.

■ **قضیه: (نامساوی کلاین)**[۴] آنتروپی نسبی همواره بزرگتر یا مساوی با صفر است، یعنی

$$S(\rho\|\sigma) \geq 0 \quad \forall \ \rho, \ \ \sigma. \tag{۱۲}$$

اثبات: پایه ای که ماتریس چگالی ρ درآن قطری است را با $\{|i\rangle\}$ نشان می دهیم. داریم $\rho = \sum_{p_i} |i\rangle\langle i|$ واز آنجا:

$$\begin{aligned} S(\rho\|\sigma) &= tr(\rho\log\rho - \rho\log\sigma) = \sum_i (p_i \log p_i - \langle i|\rho\log\sigma|i\rangle) \\ &= \sum_i p_i (\log p_i - \langle i|\log\sigma|i\rangle) \end{aligned} \tag{۱۳}$$

Klein Inequality[۴]

حال پایه ای که σ در آن قطری است را با $\{|\alpha\rangle\}$ نشان می دهیم. $\sigma = \sum_\alpha q_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|$. درنتیجه رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$S(\rho\|\sigma) = \sum_i p_i \left(\log p_i - \sum_\alpha P_{i\alpha} \log q_\alpha\right) \tag{۱۴}$$

که درآن $P_{i\alpha} = \langle i|\alpha\rangle\langle\alpha|i\rangle$. واضح است که $0 \leq P_{i\alpha} \leq 1$ و $\sum_\alpha P_{i\alpha} = 1$. بنابراین با توجه به خاصیت تحدب تابع لگاریتم خواهیم داشت:

$$\sum_\alpha P_{i\alpha} \log q_\alpha \leq \log(\sum_\alpha P_{i\alpha} q_\alpha) =: \log r_i, \tag{۱۵}$$

که درآن $r_i = \sum_\alpha P_{i\alpha} q_\alpha$. تساوی وقتی برقرار می شود که همه r_i ها با همه p_i ها یک به یک مساوی باشند و این هم وقتی رخ می دهد که همه $P_{i\alpha}$ ها بجز یکی برابر با صفر باشند. در نتیجه تا کنون ثابت کرده ایم که

$$S(\rho\|\sigma) \geq \sum_i p_i \frac{\log r_i}{\log p_i} \tag{۱۶}$$

و تساوی وقتی رخ می دهد که همه $P_{i\alpha}$ ها بجز یکی همه برابر با صفر باشند. اما می دانیم که طرف راست خود آنتروپی نسبی دو توزیع احتمال p_i و r_i است و بنابر قضیه ای که در فصل های قبل ثابت کرده ایم، این کمیت همواره بزرگتر یا مساوی با صفر است که تساوی فقط برای وقتی رخ می دهد که $r_i = p_i$. پس تا کنون ثابت کرده ایم که

$$S(\rho\|\sigma) \geq 0 \tag{۱۷}$$

که در آن تساوی وقتی رخ می دهد که $r_i = p_i$ و همه $P_{i\alpha}$ ها بجز یکی همه برابر با صفر باشند.اما این به این معناست که p_i ها با q_i ها یکی باشند.

حال بااستفاده از این قضیه به بیان و اثبات دیگر خواص آنتروپی فون نویمان می پردازیم.

- **قضیه لیندبلد-اولمان در مورد آنتروپی نسبی:**[۵] آنتروپی نسبی دو زیر سیستم از آنتروپی نسبی سیستم ها کم تر است، یعنی :

$$S(\rho_A||\sigma_A) \leq S(\rho_{AB}||\sigma_{AB}). \tag{۱۸}$$

این رابطه ریاضی که اثبات دقیق آن فوق العاده طولانی است، و در اینجا از آوردن آن صرف نظر می کنیم، از نظر شهودی قابل درک است بخصوص وقتی که فکر کنیم آنتروپی نسبی نوعی فاصله بین دو ماتریس چگالی نیز هست. در واقع با چشم پوشی از قسمتی از یک سیستم مثل B از یک سیستم مرکب AB فاصله دو ماتریس چگالی باقیمانده از یکدیگر کمتر می شود.

[۵] **Lindblad-Uhlmann**

■ **قضیه: آنتروپی نسبی در اثر کانال کوانتومی کاهش می یابد.** این قضیه شاهد دیگری است بر اینکه آنتروپی نسبی ویژگی های یک فاصله را دارد. در واقع این قضیه نشان می دهد که تمیزپذیری بین دو ماتریس چگالی در اثر عبور آنها از یک کانال کوانتومی کمتر می شود. به زبان ریاضی این قضیه چنین است:

$$S(\mathcal{E}(\rho)||\mathcal{E}(\sigma)) \leq S(\rho||\sigma). \tag{۱۹}$$

■ **اثبات:** برای اثبات کافی است به این نکته توجه کنیم که بنابر انبساط اشتاین اشپرینگ، هر کانال کوانتومی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{E}(\rho) = tr_B\Big(U(\rho\otimes\eta)U^\dagger\Big) \tag{۲۰}$$

که در آن ρ و σ روی سیستم A تعریف شده اند، U یک ماتریس یکانی است که روی سیستم مرکب AB عمل می کند و $\eta = |0\rangle\langle 0|$ یک حالت معین از سیستم کمکی است. با توجه به این قضیه می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} & S(\Lambda(\rho)\|\Lambda(\sigma)) = S\Big(Tr_B(U(\rho\otimes\eta)U^\dagger)\|Tr_B(U(\sigma\otimes\mu)U^\dagger)\Big) \\ \leq \quad & S\Big(U(\rho\otimes\mu)U^\dagger\|U(\sigma\otimes\mu)U^\dagger\Big) = S(\rho\otimes\eta\|\sigma\otimes\eta) = S(\rho\|\sigma). \end{aligned} \tag{۲۱}$$

البته در قدم آخر خواننده باید خود ثابت کند که رابطه زیر برقرار است:

$$S(\rho\otimes\eta\|\sigma\otimes\eta) = S(\rho\|\sigma). \tag{۲۲}$$

۴ ویژگیهای تحدب آنتروپی

■ **قضیه: آنتروپی فون نویمان یک تابع محدب [۶] است.**

یعنی به ازای $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n \leq 1$ به طوریکه $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n = 1$ داریم

$$S(\lambda_1\rho_1 + \cdots \lambda_n\rho_n) \geq \lambda_1 S(\rho_1) + \cdots \lambda_n S(\rho_n). \tag{۲۳}$$

[۶] Convex

بنابراین با مخلوط کردن حالت های کوانتومی آنتروپی حالت کوانتومی افزایش می یابد که از نظر شهودی نیز معنای روشنی دارد.

اثبات: قضیه را برای حالت $n=2$ ثابت می کنیم. برای حالت n دلخواه اثبات قضیه شبیهِ این حالت ِ ساده است.
قرارمی دهیم:

$$\sigma := \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2. \tag{۲۴}$$

ازنامساوی (12) استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$\begin{aligned} S(\rho_1) &\leq -tr(\rho_1 \log\sigma), \\ S(\rho_2) &\leq -tr(\rho_2 \log\sigma). \end{aligned} \tag{۲۵}$$

حال ازترکیب خطی دونامساوی بالا با ضرایب λ_1 و λ_2 به دست می آوریم:

$$\lambda_1 S(\rho_1) + \lambda_2 S(\rho_2) \leq S(\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2). \tag{۲۶}$$

- **مثال:** حالت های $|0\rangle\langle 0|$ و$|1\rangle\langle 1|$ را که دارای آنتروپی صفر هستند با احتمال مساوی باهم مخلوط می کنیم حالتی که بدست می آید یک حالت کاملا مخلوط $\rho = \frac{1}{2}I$ است که آنتروپی اش برابر با یک است.

به این ترتیب اگر در جستجوی حالتی باشیم که کمترین میزان آنتروپی را داشته باشد حتما می بایست این حالت را در زیرمجموعه حالت های خالص جستجو کنیم. هم چنین محدب بودن آنتروپی (شکلی شبیه به کله قند) نشان می دهد که هرگاه نقطه بیشینه تابع $S(\rho)$ را بخواهیم پیدا کنیم همان نقطه بیشینه مطلق هم هست و این نکته خیلی مهمی است.

- **تمرین:** تابع $f(x) := S(x\frac{I}{2} + (1-x)\rho)$ را در نظر بگیرید که در آن ρ یک ماتریس چگالی یک کیوبیتی است. مقدار ماکزیمم این تابع در چه نقطه ای رخ می دهد و مقدار آن چقدر است؟

- **آیا یک کانال کوانتومی آنتروپی حالت ها را افزایش می دهد؟** ممکن است با الهام از ترمودینامیک فکر کنیم که یک کانال کوانتومی همواره آنتروپی حالت ها را افزایش می دهد اما چنین نیست. به عنوان مثال یک کانال کوانتومی مثل کانال واقطبش یا کانال بیت برگردان،

یک حالت خالص را تبدیل به یک حالت آمیخته می کند و آنتروپی آن را افزایش می دهد. اما کانالی را در نظر بگیرید که همه حالت ها را به یک حالت خالص می نگارد،

$$\mathcal{E}(\rho) = Tr(\rho)|\phi_0\rangle\langle\phi_0|. \quad (۲۷)$$

این کانال همه حالت ها را به حالتی می نگارد که آنتروپی اش صفر است. دقت کنید که نگاشت فوق واقعا یک کانال کوانتومی (یک نگاشت کاملا مثبت) را تعریف می کند. برای تصدیق این نکته کافی است که نمایش کراوس این نگاشت را در نظر بگیریم:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i \langle i|\rho|i\rangle|\phi_0\rangle\langle\phi_0| = \sum_i |\phi_0\rangle\langle i|\rho|i\rangle\langle\phi_0| \quad (۲۸)$$

که نشان می دهد عملگرهای کراوس این نگاشت به صورت $A_i = |\phi_0\rangle\langle i|$ هستند.

- یک نتیجه از خاصیت تحدب آنتروپی به صورت زیر است. فضای ماتریس های چگالی در یک فضای هیلبرت H را با $D(H)$ نشان می دهیم. فرض کنید که $f: D(H) \longrightarrow D(H)$ یک نگاشت خطی (مثلا یک کانال کوانتومی) است. این تابع هر ماتریس چگالی را به یک ماتریس چگالی تبدیل می کند. می خواهیم ماتریس چگالی ای مثل ρ_0 را پیدا کنیم که آنتروپی $f(\rho_0)$ کمترین مقدار ممکن باشد. جستجو در فضای همه ماتریس های چگالی کار بسیار سختی است، اما خاصیت تحدب انتروپی می گوید که کافی است جستجوی خود را به فضای ماتریس های چگالی خالص محدود کنیم که فضای بسیار کوچکتری است. برای اثبات این قضیه فرض می کنیم که ρ_0 حالت مورد نظر باشد. این حالت یک تجزیه آنزامبلی به شکل $\rho_0 = \sum_k p_k|\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ دارد. می نویسیم:

$$S\big[f(\rho)\big] = S\big[f(\sum_k p_k|\phi_k\rangle\langle\phi_k|)\big] = S\big[\sum_k p_k f(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|)\big] \geq \sum_k p_k S\big[f(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|)\big]. \quad (۲۹)$$

از بین حالت های طرف راست یک حالت مثل $|\phi_0\rangle$ وجود دارد که

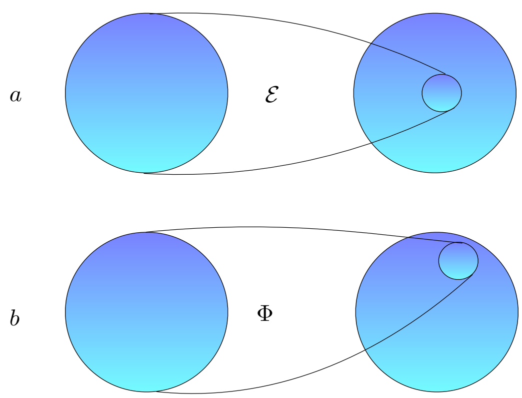
$$S\big[f(|\phi_0\rangle\langle\phi_0|)\big] \leq S\big[f(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|)\big] \qquad \forall\ k. \quad (۳۰)$$

در نتیجه

$$S\big[f(\rho)\big] \equiv \sum_k p_k S\big[f(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|)\big] \geq \sum_k p_k S\big[f(|\phi_0\rangle\langle\phi_0|)\big] = S\big[f(|\phi_0\rangle\langle\phi_0|)\big]. \quad (۳۱)$$

به این ترتیب حالتی یافته ایم که خالص است و آنتروپی اش برای تابع f کمتر از یک حالت مخلوط اولیه است. دقت کنید که این قضیه برای نگاشت هایی فراتر از کانال ها هم برقرار است زیرا فقط از خاصیت خطی بودن نگاشت استفاده کرده ایم نه از خاصیت مثبت بودن یا رد نگهدار بودن آن.

در درسهای پیشین نشان داده ایم که همه کانال ها فاصله دو حالت ورودی را نسبت به هم کاهش می دهند که اصطلاحا می گوییم کانال ها خاصیت انقباضی دارند [۷] اما در عین حال بعضی از کانال ها آنتروپی حالت ورودی را افزایش می دهند و بعضی دیگر کاهش. این که چرا این دو خاصیت با یکدیگر سازگار هستند در شکل (۲) نشان داده شده است.



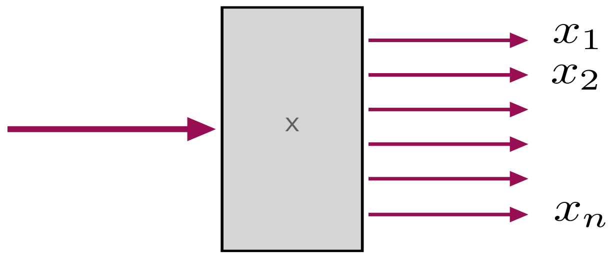
شکل ۲: شکل بالا کانالی را نشان می دهد که کره بلوخ را به نزدیکی مرکز کره تصویر می کند. چنین کانالی انتروپی حالت های ورودی را به طور متوسط افزایش می دهد. شکل زیر کانالی را نشان می دهد که کره بلوخ را به نزدیکی مرز کره (نزدیکی حالت های خالص) تصویر می کند، چنین کانالی انتروپی حالت های ورودی را به طور متوسط کاهش می دهد.

- **قضیه: آنتروپی اندازه گیری:** فرض کنید که مشاهده پذیر $X = \sum_i x_i|x_i\rangle\langle x_i|$ را اندازه گیری کنیم. دراین صورت مقادیر $\{x_i\}$ بااحتمالات $\{p_i = \langle x_i|\rho|x_i\rangle\}$ مشاهده خواهند شد. دراین صورت خواهیم داشت:

$$S(\rho) \leq H(X), \tag{۳۲}$$

که درآن علامت تساوی تنهاوقتی برقرارخواهد بود که $[X, \rho] = 0$. از نظر شهودی نیز این قضیه روشن است زیرا ممکن است اندازه گیری ای که انجام می دهیم در یک پایه نامناسب باشد که به دلیل اصل عدم قطعیت به پراکنده شدن نتایج و در نتیجه افزایش آنتروپی بینجامد. مثال روشن آن وقتی است که یک حالت $|+\rangle$ را در پایه z اندازه می گیریم. این موضوع به صورت شماتیک در شکل (۳) نشان داده شده است.

[۷] Contraction Property



$$S(\rho) \leq H(X)$$

شکل ۳: اندازه گیری در یک پایه دلخواه همواره باعث افزایش آنتروپی می شود. فقط وقتی آنتروپی حالت ورودی با آنتروپی شانون خروجی یکی است که $[\rho, X] = 0$ باشد.

اثبات: ماتریس چگالی σ را به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$\sigma := \sum_i p_i |x_i\rangle\langle x_i|. \tag{۳۳}$$

می دانیم که $S(\sigma) = H(X)$. باستفاده ازقضیه (12) می دانیم که

$$S(\rho) \leq -tr(\rho \log \sigma), \tag{۳۴}$$

که درآن علامت تساوی فقط وقتی برقرارخواهد بود که $\sigma = \rho$. طرف راست رادرپایه $\{|x_i\rangle\}$ حساب می کنیم وبدست می آوریم

$$tr(\rho \log \sigma) = \sum_i \langle x_i|\rho \log \sigma|x_i\rangle = \sum_i \langle x_i|\rho|x_i\rangle \log p_i = \sum_i p_i \log p_i, \tag{۳۵}$$

که درتساوی آخر ازقطری بودن σ دراین پایه و هم چنین تساوی $p_i = \langle x_i|\rho|x_i\rangle$ استفاده کرده ایم. باترکیب (34,35) به رابطه موردنظریعنی رابطه $S(\rho) \leq H(X)$ می رسیم. تساوی وقتی برقرارخواهد بود که داشته باشیم $\sigma = \rho$. اما این امربه این معناست که $[\rho, X] = 0$.

■ **یک توضیح مهم:** اگر به اثبات بالا دقت کنیم درمی یابیم که در آن از اینکه ویژه پایه های مشاهده پذیر X یک پایه برای فضا تشکیل داده اند استفاده کرده ایم. بنابراین قضیه بالا تنها برای وقتی برقرار است که یک اندازه گیری تصویری با تصویرگرهای رتبه یک از نوع $\{|x_i\rangle x_i, i = 1, 2, \cdots dim(H)\}$ انجام می دهیم. برای یک مثال نقیض تصور کنید که حالت ورودی یک حالت از نوع $\rho = \frac{1}{4}(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|)$ یک اندازه گیری تصویری با عملگرهای زیر انجام می دهیم:

$$P_0 = |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| \quad , \quad P_1 = |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|$$

در این صورت خواهیم داشت $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$. در این جا داریم $S(\rho) = 2$ وحال انکه آمار خروجی اندازه گیری آنتروپی یک دارد.

■ آنچه که نشان دادیم در واقع چنین است:

$$S(\rho) \leq -\sum_i \langle x_i|\rho|x_i\rangle \log\langle x_i|\rho|x_i\rangle = S(\rho^D), \tag{۳۶}$$

که در آن ماتریس ρ^D همان ماتریس چگالی در یک پایه دلخواه است با این تفاوت که تمام عناصر غیر قطری اش برابر با صفر قرار داده شده است. (دقت کنید که در هر پایه ای اگر این کار را انجام دهیم بازهم یک ماتریس چگالی معتبر پدید می آید.) بنابراین یک معنای این قضیه این است که اگر در هر پایه ای عناصر غیر قطری ماتریس چگالی ρ را برابر با صفر قرار دهیم، دراین صورت ماتریس چگالی ای بدست خواهد آمد که آنتروپی آن از حالت اول بیشتر خواهد بود. یک نمونه از این رابطه در زیر نشان داده شده است. برای همه ماتریس های رابطه زیر برقرار است:

$$S\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdot \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdot \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \leq S\begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & p_{22} & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & p_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \tag{۳۷}$$

معنای دیگر آن این است دربین همه اندازه گیری ها اندازه گیری مشاهده پذیری که با ماتریس چگالی جابجامی شود کمترین عدم قطعیت یا آنتروپی را در نتایج ایجاد می کند.

۵ زیرجمع پذیری و زیرجمع پذیری قوی

قضیه زیرجمع پذیری: [۸] هرگاه AB یک دستگاه دوبخشی باشد،

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B), \tag{۳۸}$$

که درآن $\rho_A = tr_B(\rho_{AB})$ و $\rho_B = tr_A(\rho_{AB})$. تساوی فقط وقتی برقرارمی شود که $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$. این خاصیت به معنای آن است که آنتروپی یک دستگاه همواره از مجموع آنتروپی اجزاء آن کمتراست. این امر بدلیل همبستگی هایی است که ممکن است بین اجزاء وجود داشته باشد. مثال روشن آن وقتی است که یک حالت بل را در نظر می گیریم. آنتروپی کل فقط وقتی برابر با مجموع آنتروپی اجزاء است که بین آنها همبستگی وجود نداشته باشد.

اثبات: ماتریس چگالی زیرراتعریف می کنیم:

$$\sigma_{AB} := \rho_A \otimes \rho_B, \tag{۳۹}$$

و از نامساوی (12) استفاده می کنیم:

$$S(\rho_{AB}) \leq -tr(\rho_{AB}\log\sigma_{AB}). \tag{۴۰}$$

حال دقت می کنیم که

$$\begin{aligned}\log(\sigma_{AB}) &= \log(\rho_A\otimes\rho_B) = \log((\rho_A\otimes I)(I\otimes\rho_B)) = \log(\rho_A\otimes I) + \log(I\otimes\rho_B)\\ &(\log\rho_A)\otimes I + I\otimes(\log\rho_B).\end{aligned} \tag{۴۱}$$

حال طرف راست را به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned}-tr(\rho_{AB}\log\sigma_{AB}) &= -tr(\rho_{AB}(\log\rho_A\otimes I) - tr(\rho_{AB}(I\otimes\log\rho_B))\\ &= -tr_A(\rho_A\log\rho_A) - tr_B(\rho_B\log\rho_B).\end{aligned} \tag{۴۲}$$

باکنار هم گذاردن روابط بالا به نتیجه دلخواه می رسیم. این رابطه یادآور رابطه $H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$ برای آنتروپی کلاسیک است.

[۸] Subadditivity

در درسهای قبلی دیده ایم که آنتروپی شانون در نامساوی $H(X) \leq H(X,Y)$ صدق می کند. سوال این است که آیا آنتروپی فون نویمان نیز در یک رابطه مشابه صدق می کند یا خیر. پاسخ این سوال منفی است. کافی است که سیستم مرکب AB را در یک حالت درهم تنیده $|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ قرار دهیم و دریابیم که رابطه $S(\rho_{AB}) = 0$ و حال آنکه $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 1$. بنابراین برخلاف حالت کلاسیک به طور کلی داریم

$$S(\rho_A) \nleq S(\rho_{AB}). \tag{۴۳}$$

با این وجود خاصیت زیر برقرار است.

- **نامساوی مثلث برای آنتروپی کوانتومی :** این نامساوی که نامساوی آراکی- لیب [۹] نیز خوانده می شود به شکل زیر است:

$$| \, S(\rho_A) - S(\rho_B) \, | \leq S(\rho_{AB}). \tag{۴۴}$$

- **اثبات:** می دانیم که سیستم AB در حالت ρ_{AB} است . می توان این حالت را خالص سازی کرد به این معنا که با افزودن یک سیستم کمکی R حالت خالصی مثل $|\Psi\rangle_{ABR}$ در نظر گرفت که $\rho_{AB} = tr_R(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ و یا $\rho_A = tr_{BR}(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ و الا اخر.

  حال از خاصیت جمع پذیری آنتروپی استفاده می کنیم که بر مبنای آن داریم:

$$S(\rho_{BR}) \leq S(\rho_B) + S(\rho_R). \tag{۴۵}$$

اما از آنجا که حالت $|\Psi\rangle_{ABR}$ یک حالت خالص است، داریم $S(\rho_{BR}) = S(\rho_A)$ و $S(\rho_R) = S(\rho_{AB})$. در نتیجه رابطه (۴۵) به شکل زیر در می آید:

$$S(\rho_A) \leq S(\rho_{AR}) + S(\rho_R) \tag{۴۶}$$

و یا

$$S(\rho_A) - S(\rho_R) \leq S(\rho_{AR}). \tag{۴۷}$$

با عوض کردن جای A و B و تکرار این نامساوی به نامساوی مثلث برای آنتروپی کوانتومی می رسیم.

[۹] Araki-Lieb Inequality

■ **تمرین:** فرض کنید که ρ_{AB} یک حالت درهم تنیده خالص است. طرفین نامساوی (۴۴) را حساب کنید.

حال از خود می پرسیم که اگر پایه ماتریسهای چگالی فوق برهم عمود نباشد این تساوی به چه شکلی تغییر می کند. پاسخ این سوال در قضیه زیر داده شده است:

■ **قضیه:** تابع آنتروپی در حالت کلی در نامساوی زیر صدق می کند:

$$\sum_i p_i S(\sigma_i) \leq S(\sum_i p_i\sigma_i) \leq H(\{p_i\}) + \sum_i p_i S(\sigma_i). \qquad (۴۸)$$

اگر آنتروپی متوسط حالت ها را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\overline{S} := \sum_i p_i S(\sigma_i), \qquad (۴۹)$$

رابطه (۴۸) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\overline{S} \leq S(\sum_i p_i\sigma_i) \leq \overline{S} + H(X). \qquad (۵۰)$$

به این ترتیب این قضیه یک حد بالا و پایین که براحتی قابل محاسبه است بدست می دهد. ممکن است که آنتروپی یک حالت دلخواه را نتوانیم به طور دقیق حساب کنیم ولی این نامساوی بلافاصله به ما می گوید که آنتروپی بین کدام دو حد واقع شده است.

اثبات: نامساوی سمت چپ همان خاصیت تحدب آنتروپی است که قبلا آن را ثابت کرده ایم. پس توجه خود را به نامساوی طرف راست معطوف می کنیم. نخست این نامساوی را برای وقتی ثابت می کنیم که حالت های σ_i خالص باشند یعنی $\sigma = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. البته این حالت ها لزومی ندارد که بر هم عمود باشند. در این حالت از آنجا که $S(\sigma_i) = 0$ است کافی است که ثابت کنیم

$$S\left(\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right) \leq H(\{p_i\}). \qquad (۵۱)$$

برای اثبات این رابطه حالت خالص زیر را می سازیم:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i}|\psi_i\rangle \otimes |i\rangle, \qquad (۵۲)$$

که در آن حالت های $\{|i\rangle\}$ برهم عمودند. برای این حالت خالص بدست می آوریم:

$$\rho_A = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \qquad \rho_B = \sum_{i,j}\sqrt{p_ip_j}\langle\psi_i|\psi_j\rangle|j\rangle\langle i|. \qquad (۵۳)$$

از تجزیه اشمیت می دانیم که آنتروپی این دو حالت باهم مساوی است. یعنی $S(\rho_A) = S(\rho_B)$. البته نکته این است که حالت ρ_B حالت ساده ای نیست که بتوانیم آنتروپی آن را براحتی حساب کنیم. اما در این مرحله می توانیم از یک خاصیت دیگر که قبلا ثابت کرده ایم استفاده کنیم و آن اینکه اندازه گیری تصویری هیچگاه آنتروپی را کاهش نمی دهد، یعنی $S(\rho_B) \le S(\rho_B^D)$. در واقع می نویسیم:

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) \le S(\rho_B^D) = S(\sum_i p_i |i\rangle\langle i|) = H(\{p\}), \tag{۵۴}$$

که همان رابطه ای است که می خواستیم ثابت کنیم.

به این ترتیب قضیه را برای وقتی که حالت های σ_i خالص بودند ثابت کردیم. حال می توانیم از این حالت خاص استفاده کرده و حالت کلی را که در آن دیگر σ_i ها حالت های خالص نیستند را ثابت کنیم: کافی است که دقت کنیم هر کدام از حالت های σ_i را می توان تجزیه طیفی کرد :

$$\sigma_i = \sum_j q_{ij} |\phi_{ij}\rangle\langle\phi_{ij}|. \tag{۵۵}$$

دقت کنید که

$$\langle\phi_{ij}|\phi_{ik}\rangle = \delta_{jk} \qquad \sum_j q_{ij} = 1, \qquad \forall\, i. \tag{۵۶}$$

هم چنین داریم

$$S(\sigma_i) = H(\{q_{ij}\}). \tag{۵۷}$$

در نتیجه داریم

$$\rho = \sum_i p_i \sigma_i = \sum_{i,j} p_i q_{ij} |\phi_{ij}\rangle\langle\phi_{ij}|. \tag{۵۸}$$

در این رابطه می دانیم که

$$\sum_{i,j} p_i q_{ij} = 1.$$

حال از رابطه (۵۱) استفاده می کنیم که بر مبنای آن داریم:

$$S(\sum_i p_i \sigma_i) = S(\sum_{i,j} p_i q_{ij} |\phi_{ij}\rangle\langle\phi_{ij}|) \le H(\{p_i q_{ij}\}). \tag{۵۹}$$

حال کافی است که طرف راست را ساده کنیم. می نویسیم:

$$\begin{aligned} H(\{p_i q_{ij}\}) &= -\sum_{i,j} p_i q_{ij} \log_2(p_i q_{ij}) = -\sum_{i,j} p_i q_{ij} \left(\log_2(p_i) + \log_2(q_{ij})\right) \\ &= H(\{p_i\}) + \sum_i p_i S(\sigma_i). \end{aligned} \quad (۶۰)$$

به این ترتیب قضیه به طور کامل ثابت می شود.

■ **مثال:** شخصی به ما می گوید که آنتروپی حالت

$$\rho = \frac{1}{4}|a\rangle\langle a| + \frac{1}{3}|b\rangle\langle b| + \frac{1}{6}|c\rangle\langle c| + \frac{1}{4}|d\rangle\langle d|,$$

که در آن حالت های نوشته شده دلخواه هستند که الزاما بر هم عمود نیستند، برابر است با 2.15 بیت. چگونه می توانیم ادعای او را قبول یا رد کنیم؟

حال می خواهیم خاصیتی از آنتروپی را بررسی کنیم که به خاصیت زیر جمع پذیری قوی [۱۰] مشهور است. از این قضیه می توان خاصیت زیر جمع پذیری (که قبلا آن را ثابت کرده ایم) و بعضی از خاصیت های جدید و مهم را برای آنتروپی بدست آورد. در ادامه این قضیه را ثابت نخواهیم کرد، اما نشان می دهیم که چگونه می توان نتایج مهمی را از آن استخراج کرد. دانستن و فهمیدن این نتایج از اثبات این قضیه اهمیت بیشتری دارد.

■ **قضیه: زیرجمع پذیری قوی برای آنتروپی فون نویمان:** به یاد می آوریم که زیر جمع پذیری برای آنتروپی شانون به صورت زیر بیان می شود: به ازای هر سه متغیر تصادفی X, Y و Z نامساوی زیر برقرار است:

$$H(X|Y,Z) \leq H(X|Y). \quad (۶۱)$$

این رابطه در واقع بیان می کند که ایجاد شرط اضافه باعث کاهش انتروپی شانون می شود. به عبارت دیگر اگر علاوه بر مقدار Y مقدار Z را نیز تعیین کنیم، اطلاعات کمتری در X باقی می ماند. این نامساوی را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$H(X,Y,Z) - H(Y,Z) \leq H(X,Y) - H(Y) \quad (۶۲)$$

[۱۰] Strong subaditivity Theorem

خاصیت زیر جمع پذیری قوی برای آنتروپی کوانتومی دقیقا مشابه رابطه های بالاست ، به این معنا که با تعریف آنتروپی شرطی به صورت

$$S(A|B) := S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) \tag{۶۳}$$

برای هر سیستم سه بخشی داریم:

$$S(A|B,C) \le S(A|B) \tag{۶۴}$$

و یا

$$S(\rho_{ABC}) - S(\rho_{BC}) \le S(\rho_{AB}) - S(\rho_B). \tag{۶۵}$$

■ **اثبات:** این قضیه را به راحتی با استفاده از قضیه لیندبلدـاولمان ثابت می کنیم. یک سیستم سه بخشی مثل ABC در نظر می گیریم. در همه این نوع اثبات ها نکته مهم این است که بتوانیم انتخاب خوبی برای ماتریس های چگالی ای که می خواهیم در قضیه لیندبلدـاولمان قرار دهیم، داشته باشیم. این انتخاب بستگی به نتیجه ای که می خواهیم به آن برسیم انجام می شود. برای قضیه کنونی نامساوی لیندبلدـاولمان را به شکل زیر به کار می بریم:

$$S(\rho_{AB}||\rho_A \otimes \rho_B) \le S(\rho_{ABC}||\rho_A \otimes \rho_{BC}). \tag{۶۶}$$

حال کافی است که طرفین این نامساوی را بسط دهیم و با توجه به تعریف آنتروپی نسبی بنویسیم

$$-S(\rho_{AB}) - tr(\rho_{AB}\log(\rho_A \otimes \rho_B)) \le -S(\rho_{ABC}) - tr(\rho_{ABC}\log(\rho_A \otimes \rho_{BC})). \tag{۶۷}$$

اما با توجه به اینکه

$$\log(\rho_A \otimes \rho_B) = \log\rho_A \otimes I_B + I_A \otimes \log\rho_B$$

و ویژگی های رد جزیی، نتیجه می گیریم:

$$-S(\rho_{AB}) + S(\rho_A) + S(\rho_B) \le -S(\rho_{ABC}) + S(\rho_A) + S(\rho_{BC}) \tag{۶۸}$$

که پس از ساده کردن چیزی نیست جز همان رابطه زیرجمع پذیری قوی:

$$S(\rho_{ABC}) + S(\rho_B) \le S(\rho_{AB}) + S(\rho_{BC}). \tag{۶۹}$$

اکنون می خواهیم ببینیم این نامساوی چه نتایجی در بر دارد. این نتایج را در زیر می نویسیم:

- **نتیجه اول:** می توان خاصیت زیر جمع پذیری را از خاصیت زیر جمع پذیری قوی بدست آورد. برای این کار سیستم سه تایی را در حالت زیر در نظر بگیرید:

$$\rho_{ABC} = \rho_{AC} \otimes |0\rangle\langle 0|_B \quad (۷۰)$$

که در آن $\langle 0|$ یک حالت دلخواه خالص است. در این صورت داریم:

$$S(\rho_{ABC}) = S(\rho_{AC}), \qquad S(\rho_B) = 0, \qquad S(\rho_{AB}) = S(\rho_A), \qquad S(\rho_{BC}) = S(\rho_C). \quad (۷۱)$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۶۵) به رابطه زیر جمع پذیری معمولی می رسیم.

- **نتیجه دوم:** قبلا دیدیم که خاصیت $S(A) \leq S(AB)$ برای آنتروپی کوانتومی بر خلاف آنتروپی کلاسیک برقرار نیست. معنای این حرف این است که آنتروپی شرطی کوانتومی همواره یک کمیت مثبت نیست. مثالی که ذکر کردیم نیز یک حالت خالص درهم تنیده بود که آنتروپی سیستم بزرگ برابر با صفر و آنتروپی یک زیر سیستم آن برابر با یک بود. نکته مهم آن است که اگر چه آنتروپی یک زیر سیستم می تواند از آنتروپی کل سیستم بزرگ تر باشد ولی این کار برای دو زیر سیستم امکان پذیر نیست.! به این معنا که اگر یک سیستم سه بخشی ABC داشته باشیم آنگاه نامساوی زیر همواره برقرار است:

$$S(A) + S(B) \leq S(A,C) + S(B,C). \quad (۷۲)$$

در واقع ممکن است که $S(A)$ از $S(A,C)$ بزرگ تر باشد یا $S(B)$ از $S(B,C)$ بزرگ تر باشد ولی هر دو نامساوی همزمان نمی توانند برقرار باشند. یک راه دیگر بیان این موضوع این است که در یک سیستم سه بخشی یک بخش نمی تواند با دو بخش دیگر در حالت درهم تنیده ماکزیمال قرار بگیرد. زیرا اگر چنین باشد طرف راست نامساوی بالا برابر با صفر و طرف چپ آن (برای کیوبیت ها) برابر با ۲ است. این خاصیت به نام خاصیت تک همسری درهم تنیدگی [۱۱] شناخته می شود.

برای اثبات این نامساوی کافی است که به رابطه زیر جمع پذیری قوی یعنی رابطه (۶۵) توجه کنیم و سیستمی مثل R در نظر بگیریم به قسمی که سیستم $ABCR$ در یک حالت خالص باشد. در این صورت می دانیم که

$$S(ABC) = S(R), \qquad S(BC) = S(AR). \quad (۷۳)$$

[۱۱] Monogomy of Entanglement

با جایگذاری این تساوی ها در (۶۵) بدست می آوریم:

$$S(R) - S(AR) \leq S(AB) - S(B) \tag{۷۴}$$

و پس از مرتب کردن

$$S(R) + S(B) \leq S(AR) + S(AB), \tag{۷۵}$$

که چیزی نیست جز همان رابطه ای که می خواستیم ثابت کنیم (البته با نام های عوض شده).

- **نتیجه سوم:** صرف نظر کردن از یک بخش همواره باعث کاهش اطلاعات متقابل می شود، به این معنا که برای هر سیستم سه بخشی داریم:

$$I(A:B) \leq I(A:B,C). \tag{۷۶}$$

از نظر شهودی این رابطه معنای روشنی دارد به این صورت که بهر حال دانستن اطلاعاتی در مورد B و C مقدار بیشتری اطلاعات در مورد A به ما می دهد تا وقتی که تنها اطلاعاتی در باره B داشته باشیم. اما اثبات این رابطه خیلی ساده است. کافی است که این رابطه را باز کنیم و بنویسیم

$$S(A) + S(B) - S(A,B) \leq S(A) + S(B,C) - S(A,B,C), \tag{۷۷}$$

که با حذف $S(A)$ از دو طرف می بینیم چیزی نیست جز همان خاصیت زیر جمع پذیری قوی.

- **نتیجه چهارم:** یک کانال کوانتومی هیچگاه اطلاعات متقابل را افزایش نمی دهد. به عبارت دقیق تر سیستم مرکب AB را در نظر بگیرید که در حالت ρ_{AB} قرار دارد. حال فرض کنید که این سیستم تحت تاثیر یک کانال کوانتومی مثل $\mathcal{E}_B$ قرار می گیرد. بنابراین کانال $\mathcal{E}$ فقط روی B اثر می کند. طبیعی است که حالت ρ_A در این صورت تغییر نمی کند. می خواهیم ببنیم آیا کانال $\mathcal{E}$ می تواند اطلاعات متقابل بین دو قسمت A و B را افزایش دهد؟ پاسخ این است که خیر،

$$I(A:\mathcal{E}(B)) \leq I(A:B), \tag{۷۸}$$

و این پاسخ از نظر فیزیکی و شهودی نیز مورد انتظار است.

برای فهم اثبات این نتیجه چهارم که در پی می آید توجه به تمرین های حل شده ی زیر مهم است:

■ تمرین: هرگاه داشته باشیم

$$\rho'_{AB} = (I \otimes \mathcal{E}_B)(\rho_{AB}) \tag{۷۹}$$

که در آن $\mathcal{E}_B$ یک نگاشت رد نگهدار است، نشان دهید که $\rho'_A = \rho_A$.

■ حل: حالت ρ_{AB} را به صورت زیر بسط می دهیم:

$$\rho_{AB} = \sum_i x_i \otimes y_i. \tag{۸۰}$$

که در نتیجه

$$\rho_A = \sum_i x_i \otimes tr(y_i) \tag{۸۱}$$

در نتیجه

$$(I \otimes \mathcal{E}_B)(\rho_{AB}) = \sum_i x_i \otimes \mathcal{E}_B(y_i). \tag{۸۲}$$

حال روی بخش دوم رد می گیریم و بدست می آوریم:

$$\rho'_A := tr_B(\rho'_{AB}) = \sum_i x_i \otimes tr(\mathcal{E}_B(y_i)) = \sum_i x_i \otimes tr(y_i) = \rho_A. \tag{۸۳}$$

دقت کنید که این نتیجه فقط برای نگاشت ردـنگهدار درست است.

■ تمرین: هرگاه داشته باشیم

$$\rho'_{AB} = (I \otimes U_B)(\rho_{AB})(I \otimes U_B^\dagger) \tag{۸۴}$$

نشان دهید که

$$\rho'_B = U_B\, \rho_B\, U_B^\dagger. \tag{۸۵}$$

■ حل: حالت ρ_{AB} را به صورت زیر بسط می دهیم:

$$\rho_{AB} = \sum_i x_i \otimes y_i. \tag{۸۶}$$

که درنتیجه

$$\rho_B = \sum_i (trx_i) y_i. \tag{۸۷}$$

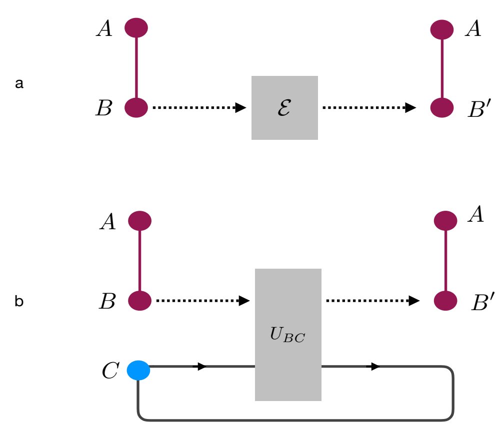
بنابراین

$$(I \otimes U_B)(\rho_{AB})(I \otimes U_B^\dagger) = \sum_i x_i \otimes U_B\, y_i\, U_B^\dagger. \tag{۸۸}$$

حال روی بخش اول رد می گیریم و بدست می آوریم:

$$\rho'_B := \sum_i tr(x_i) U_B\, y_i U_B^\dagger = U_B (\sum_i (trx_i) y_i) U_B^\dagger = U_B \rho_B U_B^\dagger. \tag{۸۹}$$

توجه می کنیم که کانال یاد شده را همواره می توان به صورت زیر اعمال کرد. یک حالت مشخص مثل $|0\rangle_C$ در کنار حالت ρ_{AB} قرار می دهیم و روی کل این حالت عملگر U_{BC} را اعمال کرده و سپس روی C رد می گیریم ، شکل (۴).



شکل ۴: شکل بالایی کانال $\mathcal{E}$ را نشان می دهد که روی بخش B اثر می کند. شکل پایین: این کانال را می توان به صورت یک عملگر یکانی نشان داد که روی یک بخش بزرگ تر عمل می کند و در انتها روی بخش اضافی رد گرفته می شود.

بیایید حالت های قبل از عمل کانال را با حروف بدون پرایم و حالت های بعد از عمل کانال را با حروف با پرایم نشان دهیم. به این ترتیب می توانیم بنویسیم:

$$\rho_{A'B'C'} = (I\otimes U_{_{BC}})\,\rho_{ABC}\,(I\otimes U^{\dagger}_{_{BC}}) \qquad (۹۰)$$

که به معنای این است که

$$\rho_{B'C'} = U_{_{BC}}\,\rho_{BC}\,U^{\dagger}_{_{BC}}. \qquad (۹۱)$$

برای اثبات قضیه، به نتیجه ای که قبلا بدست آورده ایم تکیه می کنیم که بر مبنای آن اطلاعات متقابل با افزودن یک سیستم دیگر هیچ وقت کم نمی شود به عبارت دیگر:

$$I(A':B') \leq I(A':B'C') \qquad (۹۲)$$

حال نشان می دهیم که طرف راست چیزی نیست جز $I(A:B)$. برای این کار عبارت صریح طرف راست را می نویسیم و از نتایج دو تمرین قبلی و روابط (۹۰) و (۹۱) استفاده می کنیم:

$$I(A':B'C') = S(A') + S(B'C') - S(A'B'C') = S(A) + S(BC) - S(ABC) \qquad (۹۳)$$

اما چون

$$\rho_{ABC} = \rho_{AB}\otimes |0\rangle_C\langle 0| \qquad (۹۴)$$

خواهیم داشت

$$S(BC) = S(B) \qquad S(ABC) = S(AB) \qquad (۹۵)$$

و در نتیجه

$$I(A':B'C') = S(A') + S(B'C') - S(A'B'C') = S(A) + S(B) - S(AB) = I(A:B). \qquad (۹۶)$$

به این ترتیب نتیجه چهارم نیز ثابت می شود.

۶ ضمیمه: در باره جان فون نویمان

شکل ۵: جان فون نویمان، ریاضیدان مجارستانی (۱۹۰۳ـ۱۹۵۷)

جان فون نویمان ریاضیدان مجاری الاصلی بود که سالهای عمده عمر خود را در آمریکا و در موسسه مطالعات پیشرفته گذراند. وی در طول عمر کوتاه خود نه تنها بسیاری از زیر شاخه های ریاضیات مثل جبر و نظریه مجموعه ها و هم چنین فیزیک را متحول کرد بلکه سهم مهمی نیز در توسعه اقتصاد و آمار، نظریه بازی ها، تولید انرژی هسته ای و رایانش الکترونیک ایفا کرد. اغلب از او به عنوان یکی از آخرین ریاضیدانان بزرگ نام برده می شود. نبوغ افسانه امیز او حتی در زمان حیاتش باعث پیدایش انبوهی از حکایت ها و داستان ها شده بود که بین شاگردان و همکارانش رواج داشت. مشهور است که وقتی از او هر سوالی در هر زمیه ای از فیزیک یا ریاضیات می پرسیدی فقط سه ثانیه طول می کشید تا جواب بدهد.
سه نمونه از این حکایت ها جالب اند:

انریکو فرمی خطاب به یکی از همکارانش: « می دانی، جانی می توانست ده برابر سریع تر از من محاسبه ذهنی انجام دهد و من می توانم ده برابر سریع تر از تو محاسبه ذهنی انجام دهم. حالا می توانی بفهمی که جانی چقدر شگفت انگیز بود.»

یوجین ویگنر : «در باره قوای ذهنی فون نویمان احساس می کردی که با یک ماشین فوق العاده کامل روبرو هستی که همه اجزایش با دقت یک هزارم اینچ در حال کار کردن اند. »

هانس بته : « من بعضی وقت ها فکر می کنم که مغزی مثل مغز فون نویمان احتمالا نشان دهنده این است که او به گونه ای فراتر از انسان تعلق داشته است. »

۷ مسئله ها

- تمرین: آنتروپی فون نویمان مربوط به بردارهای درون کره بلوخ را برحسب شعاع بردارها حساب کنید. این تمرین به خوبی نشان می دهد که هر چه حالت خالص تر باشد، آنتروپی فون نویمان آن کمتر و هر چه حالت به یک حالت مخلوط نزدیک تر باشد آنتروپی فون نویمان آن بیشتر است.

- ماتریس چگالی دوکیوبیتی زیر را در نظر بگیرید. برای آنکه این ماتریس نشان دهنده یک حالت کوانتومی باشد، پارامترهای آن می بایست در یک محدوده معین قرار بگیرند. نخست این محدوده را مشخص کنید. سپس آنتروپی فون نویمان این حالت را حساب کنید و مقدار کمینه و بیشینه آن را بدست آورید.

$$\rho = \frac{1}{4}(I + s_1\sigma_x \otimes \sigma_x + s_2\sigma_y \otimes \sigma_y + s_3\sigma_z \otimes \sigma_z). \quad (۹۷)$$

- از خاصیت زیرجمع پذیری قوی استفاده کنید و درستی روابط زیر را نشان دهید:

$$S(C|A) + S(C|B) \geq 0. \quad (۹۸)$$

و

$$I(A:B) + I(A:C) \leq 2S(A). \quad (۹۹)$$

هم چنین مثالی ارائه دهید که درستی رابطه زیر را نشان دهد:

$$S(A|C) + S(B|C) \neq 0. \quad (۱۰۰)$$

دقت کنید که در حالت کلاسیک رابطه (۹۹) به این دلیل درست است که رابطه $H(A:B) \leq H(A)$ و $H(A:C) \leq H(A)$. اما در حالت کوانتومی این رابطه به دلیل خاصیت زیرجمع پذیری قوی برقرار است چرا که نامساوی های بالا الزاما برقرار نیستند. مثالی ارائه دهید که نشان دهد در حالت کوانتومی $I(A:B) > S(A)$.

- تمرین: دو ماتریس چگالی یک کیوبیتی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\cdot\sigma), \qquad \sigma = \frac{1}{2}(I + \mathbf{s}\cdot\sigma). \quad (۱۰۱)$$

آنتروپی های نسبی زیر را حساب کنید:

$$S(\rho\|\sigma), \qquad S(\sigma\|\rho). \tag{۱۰۲}$$

■ تمرین: نشان دهید که

$$S(\rho_1\otimes\rho_2\|\sigma_1\otimes\sigma_2) = S(\rho_1\|\sigma_1) + S(\rho_2\|\sigma_2). \tag{۱۰۳}$$

■ تمرین: دو حالت کیوبیتی خالص $|\phi\rangle$ و $|\psi\rangle$ را در نظر بگیرید. آنتروپی نسبی آنها را حساب کنید. آیا این نتیجه را می توانید به بعدهای دلخواه تعمیم دهید.

■ تمرین: الف: نشان دهید که آنتروپی نسبی دارای خاصیت یکنوایی است یعنی برای هر دو سیستمی داریم:

$$S(\rho_A||\sigma_A) \leq S(\rho_{AB}||\sigma_{AB}). \tag{۱۰۴}$$

ب: با استفاده از این خاصیت، خاصیتِ زیرجمع پذیری قوی را ثابت کنید. (راهنمایی: برای این کاررابطه بالا را برای ρ_{ABC} و $\rho_A\otimes\rho_{BC}$ به کار ببرید.)

پ: نشان دهید که به ازای هر کانال کوانتومی داریم:

$$S(\mathcal{E}(\rho)||\mathcal{E}(\sigma)) \leq S(\rho||\sigma). \tag{۱۰۵}$$

(راهنمایی: از این موضوع استفاده کنید که هر کانال کوانتومی را می توان به صورت یک عملگر یکانی روی یک فضای بزرگ تر نشان داد.)

■ تمرین: یک حالت خالص $|\phi\rangle$ و یک حالت کاملا آمیخته $\frac{I}{2}$ را در نظر بگیرید. آنتروپی نسبی بین آنها را حساب کنید. دقت کنید چون انتروپی نسبی متقارن نیست می بایست دو تابع انتروپی را حساب کنید. آیا این نتیجه را می توانید به بعد دلخواه تعمیم دهید؟

■ تمرین: برای کیوبیت ها یک حالت دلخواه ρ

و یک حالت کاملا آمیخته $\frac{I}{2}$ را در نظر بگیرید. آنتروپی نسبی بین آنها را حساب کنید. دقت کنید چون انتروپی نسبی متقارن نیست می بایست دو تابع انتروپی را حساب کنید. آیا این نتیجه را می توانید به بعد دلخواه تعمیم دهید؟

- خاصیت زیرجمع پذیری قوی را برای حالت کلاسیک بیان و ثابت کنید. برای این اثبات از خاصیت جمع پذیری قوی کوانتومی استفاده نکنید.

- تمرین: آنتروپی حالت های $\rho_1=\frac{1}{2}(I+\mathbf{r}_1\cdot\sigma)$ و $\rho_2=\frac{1}{2}(I+\mathbf{r}_2\cdot\sigma)$ و $\rho=\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2$ را بدست آورید و صحت نامساوی بالا را تحقیق کنید.

- تمرین: در فضای d بعدی ، حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\rho=\lambda|\psi\rangle\langle\psi|+\lambda|\phi\rangle\langle\phi|, \tag{۱۰۶}$$

که در آن $|\psi\rangle$ و$|\phi\rangle$ دو حالت غیرمتعامد هستند. آنتروپی فون نویمان برای حالت ρ را برحسب λ و زاویه بین بردارهای $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ حساب کنید و صحت نامساوی ۲۶ را تحقیق کنید.

- تمرین: کانال واقطبش با پارامتر p را در نظر بگیرید . این کانال با احتمال $1-p$ حالت را دست نخورده نگاه می دارد و با احتمال p آن را تبدیل به یک حالت کاملا مخلوط می کند.

الف: آنتروپی حالت خروجی این کانال وقتی که یک حالت ورودی خالص را به آن وارد می کنیم چقدراست؟

ب: در میان کلیه حالت های ورودی (مخلوط یا خالص) کدام حالت است که آنتروپی حالت خروجی اش از همه کمتر است. (برای این قسمت فرض کنید که کانال کیوبیتی است).

- تمرین: یک کانال پاوولی متقارن به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(\rho)=(1-2P_0-P_1)\,\rho+P_0X\rho X+P_1Y\rho Y+P_0Z\rho Z, \tag{۱۰۷}$$

که در آن X, Y, Z ماتریس های پاوولی هستند. از میان تمام حالت های خالص ورودی ، حالتی را پیدا کنید که آنتروپی حالت خروجی این کانال را کمینه کند.

یک کانال یکانی و تصادفی $RandomUnitary$ کانالی است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i U_i \rho U_i^\dagger, \tag{۱۰۸}$$

که در آن U_i ها ماتریس های یکانی هستند. ثابت کنید که در چنین کانالی همواره آنتروپی حالت خروجی بیش از آنتروپی حالت ورودی است.

- تمرین: ثابت کنید که به طور کلی در یک کانال کوانتومی ، آن حالت ورودی ای که آنتروپی خروجی را کمینه می کند حتما یک حالت خالص است. (راهنمایی: فرض کنید که این حالت یک حالت مخلوط باشد، سپس آن را به حالت های خالص تجزیه کنید و از قضیه تحدب آنتروپی شانون استفاده کنید. به این ترتیب ثابت می کنید که هرگاه یک حالت مخلوط ورودی دارای چنین خاصیتی باشد حتما می توانید یک حالت خالص نیز پیدا کنید که دارای چنین خاصیتی باشد).

- تمرین: نشان دهید که اندازه گیری تصویری Projective Measurement همواره انتروپی یک حالت را یا ثابت نگاه می دارد یا اینکه آن را افزایش می دهد. راهنمایی: یک اندازه گیری تصویری حالت را به صورت زیر تغییر می دهد:

$$\rho \longrightarrow \rho' = \sum_i P_i \rho P_i, \tag{۱۰۹}$$

که در آن P_i ها عملگرهای تصویری هستند. نخست ثابت کنید که

$$\rho' \, P_i = P_i \, \rho' \qquad \forall i. \tag{۱۱۰}$$

سپس با قرار دادن عملگر $\sum_i P_i = I$ واستفاده از خاصیت های عملگرهای تصویری و هم چنین رابطه ۱۱۰ نشان دهید که $-tr(\rho \log \rho') = S(\rho')$. حال کافی است که از نامساوی $S(\rho \,||\, \rho') = S(\rho) - tr(\rho \log \rho') \leq 0$ استفاده کنید و به نتیجه نهایی برسید.

برخلاف تصوری که از مثال های پیشین ممکن است بدست آمده باشد، یک کانال کوانتومی همواره آنتروپی حالت ها را افزایش نمی دهد. تمرین زیر این موضوع را روشن می کند.

■ تمرین: یک کانال کوانتومی با عملگرهای کراوس $A_0 = |0\rangle\langle 0|$ و $A_1 = |+\rangle\langle 1|$ در نظر بگیرید. حال یک حالت ورودی به این کانال بدهید که آنتروپی اش از آنتروپی حالت خروجی بیشتر باشد. با الهام از این مثال ، یک کانال دیگر در بعد دلخواه تعریف کنید که دارای این خاصیت باشد.

■ تمرین: یک اثبات دیگر برای خاصیت تحدب آنتروپی : می خواهیم ثابت کنیم که

$$\sum_x p_x S(\rho_x) \leq S(\sum_x p_x \rho_x). \tag{۱۱۱}$$

برای اثبات این نامساوی حالت زیر را تعریف کنید:

$$\rho_{AB} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \rho_x \tag{۱۱۲}$$

که در آن حالت های $\{|x\rangle\}$ یک مجموعه حالت های عمود برهم است. سپس از خاصیت زیر جمع پذیری استفاده کنید و رابطه ۱۱۱ را ثابت کنید.

■ تمرین: بازهم یک اثبات دیگر برای خاصیت تحدب آنتروپی : تابع زیر را تعریف کنید:

$$f(p) = S(p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2) \tag{۱۱۳}$$

که در آن σ_1 و σ_2 ماتریس های چگالی هستند. نشان دهید که

$$f''(p) \leq 0.$$

(راهنمایی: نخست حالتی را در نظر بگیرید که در آن ماتریس های چگالی σ_1 و σ_2 وارون پذیر هستند و سپس حالت کلی را مطالعه کنید.
)

■ تمرین: یک ماتریس چگالی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\rho = \sum_i p_i\sigma_i, \qquad (۱۱۴)$$

که در آن σ_i ها ماتریس های چگالی ای هستند که پایه آنها برهم عمود هستند. نشان دهید که

$$S(\sum_i p_i\sigma_i) = H(\{p_i\}) + \sum_i p_i S(\sigma_i). \qquad (۱۱۵)$$

■ دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|\phi_1\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle, \qquad |\phi_2\rangle = \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle. \qquad (۱۱۶)$$

حالت مخلوط زیر را از این دو حالت تهیه می کنیم:

$$\rho = \frac{1}{2}\left(|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\right) \qquad (۱۱۷)$$

صحت رابطه (۴۸) را تحقیق کنید.

■ تمرین: الف: نشان دهید که به ازای هر ماتریس A همواره می توان ماتریس های یکانی U_i و احتمالات p_i را چنان یافت به قسمی که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\sum_i p_i U_i A U_i^\dagger = tr(A)\frac{I}{d}. \qquad (۱۱۸)$$

ب: از خاصیت تحدب آنتروپی فون-نویمان استفاده کنید و نشان دهید که حالت کاملا مخلوط تنها حالتی است که در آن آنتروپی به مقدار بیشینه خود می رسد.

■ یک کانال کوانتومی کیوبیتی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(\rho) = p_0(\rho + \sigma_z\rho\sigma_z) + p(\sigma_x\rho\sigma_x + \sigma_y\rho\sigma_y)\ , \qquad 2p_0 + 2p = 1. \qquad (۱۱۹)$$

حالتی که آنتروپی خروجی کانال را کمینه می کند پیدا کنید. راهنمایی: این کانال یک نوع تقارن دارد به این معنا که

$$\mathcal{E}(\sigma_z\rho\sigma_z) = \sigma_z\mathcal{E}(\rho)\sigma_z. \qquad (۱۲۰)$$

■ یک کانال کوانتومی که روی حالت های کوانتومی سه ترازه اثر می کند به شکل زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{E}(\rho) = p_0\rho + pX\rho X^\dagger + pZ\rho Z^\dagger, \tag{۱۲۱}$$

که در آن X و Z عملگرهای تعمیم یافته پاوولی هستند. (برای تعریف به درس سوم تحت عنوان ماتریس های چگالی مراجعه کنید.) حالتی را که خروجی اش کمترین میزان آنتروپی را دارد حساب کنید.

■ تمرین: نشان دهید که اگر یک تابع توامان محدب باشد آنگاه نسبت به هرکدام از متغیرهایش جداگانه محدب است.

■ قضیه لیب: [۱۲] [۱۳]

به ازای هر ماتریس دلخواه X و به ازای $0 \leq t \leq 1$ تابع

$$f_t(A,B) := tr(A^t X B^{1-t} X^\dagger) \tag{۱۲۲}$$

یک تابع توامان محدب نسب به ماتریس های مثبت A و B است.

■ تمرین: فرض کنید که آلیس رشته هایی را به صورت زیر و با احتمال داده شده به باب می فرستد:

(۱۲۳)

000	۱/۴
001	۱/۴
010	۱/۸
011	۱/۸
100	۱/۱۶
101	۱/۱۶
110	۱/۱۶
111	۱/۱۶

الف_احتمال این که آلیس رشته ای را شامل تعداد زوجی 1 به باب بفرستد چقدر است؟

ب_به فرض اینکه رشته فرستاده شده زوج است احتمال اینکه رشته ارسال شده 110 باشد چقدر است؟

[۱۲] Lieb Theorem

[۱۳] الیوت اچ. لیب ریاضی فیزیکدان آمریکایی و استاد دانشگاه پرینستون است. کارهای وی در مکانیک آماری، آنالیز تابعی و ماده چگال است.

ج ـ آنتروپی شانون رشته ها را به شرط آنکه بدانیم رشته فرستاده شده زوج است حساب کنید.

دـ به فرض اینکه رشته فرستاده شده زوج نیست احتمال اینکه رشته ارسال شده 100 باشد چقدر است؟

هـ آنتروپی شانون رشته ها را به شرط آنکه بدانیم رشته فرستاده شده فرد است حساب کنید.

وـ به فرض اینکه اولین رقم سمت چپ رشته برابر با صفر باشد احتمال اینکه رشته ارسال شده 010 باشد چقدر است؟

زـ آنتروپی شانون رشته ها را به شرط آنکه بدانیم اولین رقم سمت چپ رشته برابر با صفر است حساب کنید.

ح ـ از اینکه رقم سمت چپ چه عددی است بیشتر اطلاع بدست می آورید یا از اینکه بدانید رشته ارسال شده زوج است یا فرد؟

■ تمرین: یک ماتریس چگالی دو کیوبیتی به صورت زیر داده شده است:

$$\rho = \frac{1}{4}(I + b\sigma_x \otimes I + b\, I \otimes \sigma_x + s_1\sigma_x \otimes \sigma_x + s_2\sigma_y \otimes \sigma_y + s_3\sigma_z \otimes \sigma_z). \qquad (۱۲۴)$$

آنتروپی فون نویمان این ماتریس چگالی را حساب کنید. مقادیر کمینه و بیشینه این آنتروپی چقدر است؟

■ تمرین: یک ماتریس چگالی به صورت

$$\rho = \frac{1}{Z}e^{-\beta H} \qquad (۱۲۵)$$

داده شده است که در آن $\beta = \frac{1}{kT}$است. آنتروپی فون نویمان را برای این ماتریس چگالی حساب کنید. H هامیلتونی سیستم است.

■ تمرین: یک ماتریس چگالی دو کیوبیتی به صورت زیر داده شده است:

$$\rho = \frac{1}{4}(I + a\sigma_z \otimes I + a\, I \otimes \sigma_z + s_1\sigma_x \otimes \sigma_x + s_2\sigma_y \otimes \sigma_y + s_3\sigma_z \otimes \sigma_z). \qquad (۱۲۶)$$

آنتروپی فون نویمان این ماتریس چگالی را حساب کنید. مقادیر کمینه و بیشینه این آنتروپی چقدر است؟